Estudo da mortalidade com diferentes especificações de fragilidade: uma aplicação ao caso português

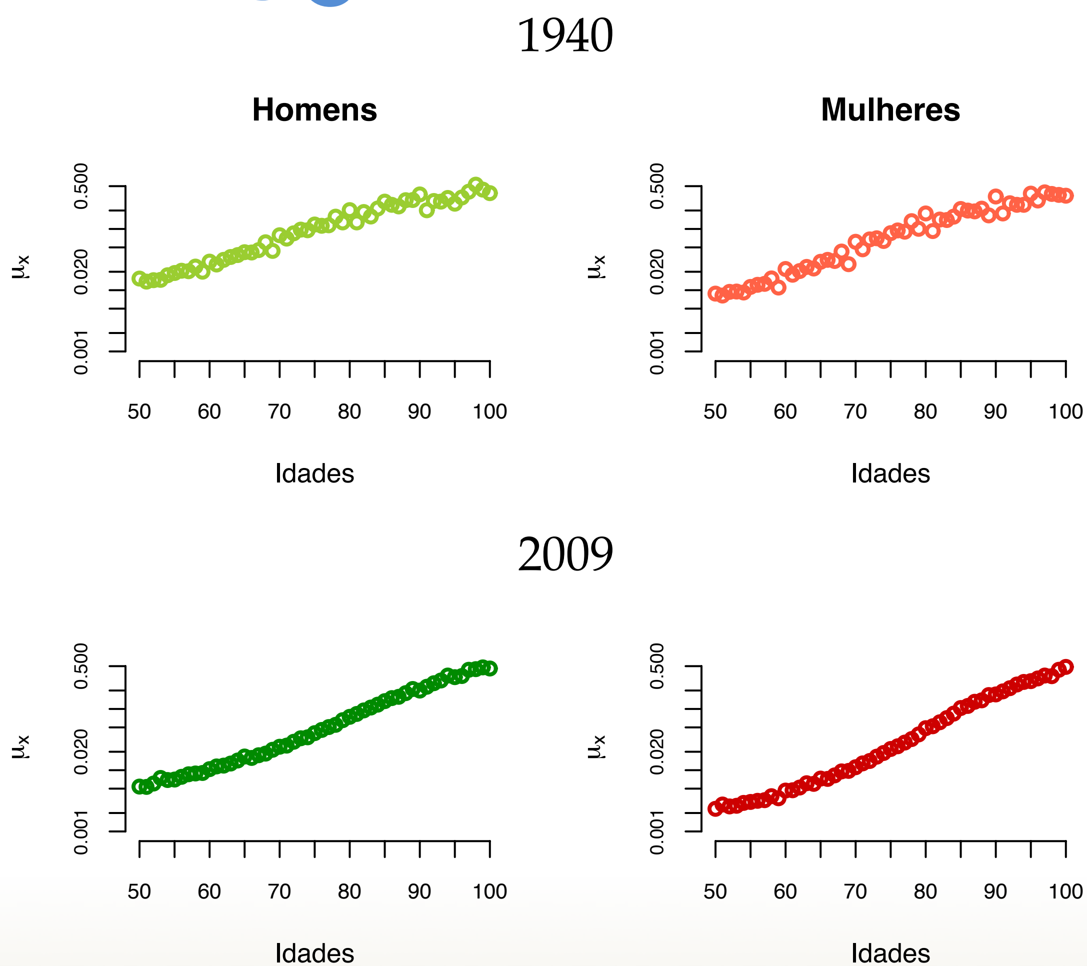
Filipe Ribeiro, *Universidade de Évora/MPIDR*
Trifon I. Missov, *MPIDR*
José Gonçalves Dias, *Instituto Universitário de Lisboa (ISCTE-IUL)*
Maria Filomena Mendes, *Universidade de Évora*

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR DEMOGRAFISCHE FORSCHUNG
MAX PLANCK INSTITUTE FOR DEMOGRAPHIC RESEARCH

Introdução

- Frequente utilização da força de mortalidade na análise do número de mortes *per capita*;
- Desenvolvimento de diversas *leis de mortalidade* (modelos estatísticos);



Introdução

- No entanto, até aos dias de hoje nenhuma lei de mortalidade poderá ser rotulada de "*universal*";

- E raras são aquelas em que a *heterogeneidade populacional* é tida em conta.

Objectivos

- Estimar a força de mortalidade por idade, sexo e para os diferentes anos em análise;
- Incluir no modelo a heterogeneidade não observada;
- E testar qual a distribuição de fragilidade que mais se adequa.

Metodologia

- Assumimos que o número total de mortes (y_{ij}) no ano j e com idade i, segue uma distribuição *Poisson* com média $\mu_{ij} \times E_{ij}$, em que E_{ij} corresponde ao número de indivíduos expostos ao evento no ano j e com idade i:

$$y_{ij} \sim \text{Poisson}\left(\mu_{ij} \times E_{ij}\right)$$

Metodologia

- O que nos permite aplicar o estimador de máxima verosimilhança:

$$lnL(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \{ y_{ij} \, ln[\mu_{ij}(\theta)] - \mu_{ij}(\theta) * E_{ij} \},$$

  - Em que θ corresponde aos parâmetros do modelo a serem estimados.

Dados

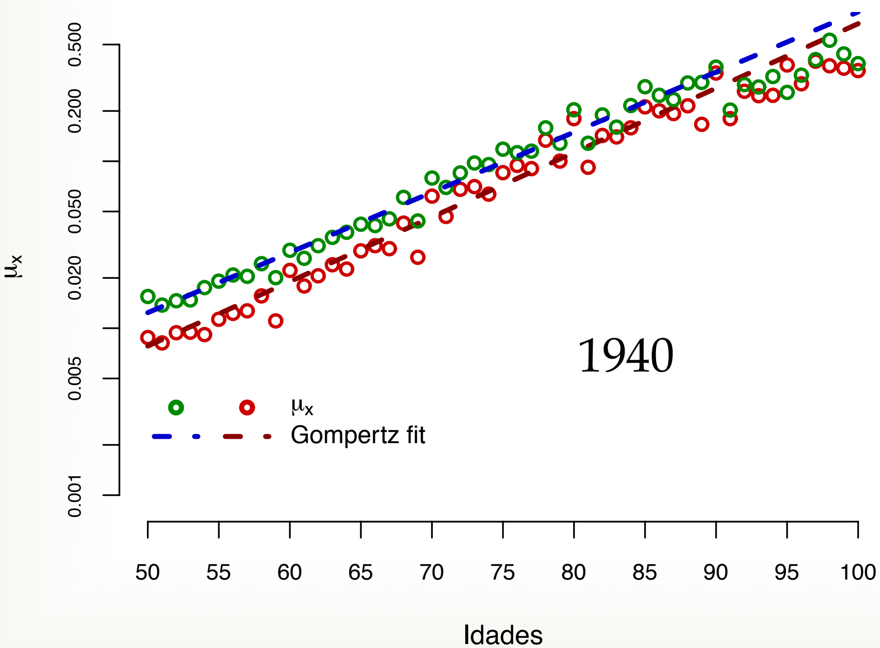
- Recorreu-se à *Human Mortality Database* (HMD), de onde se recolheram os dados referentes:

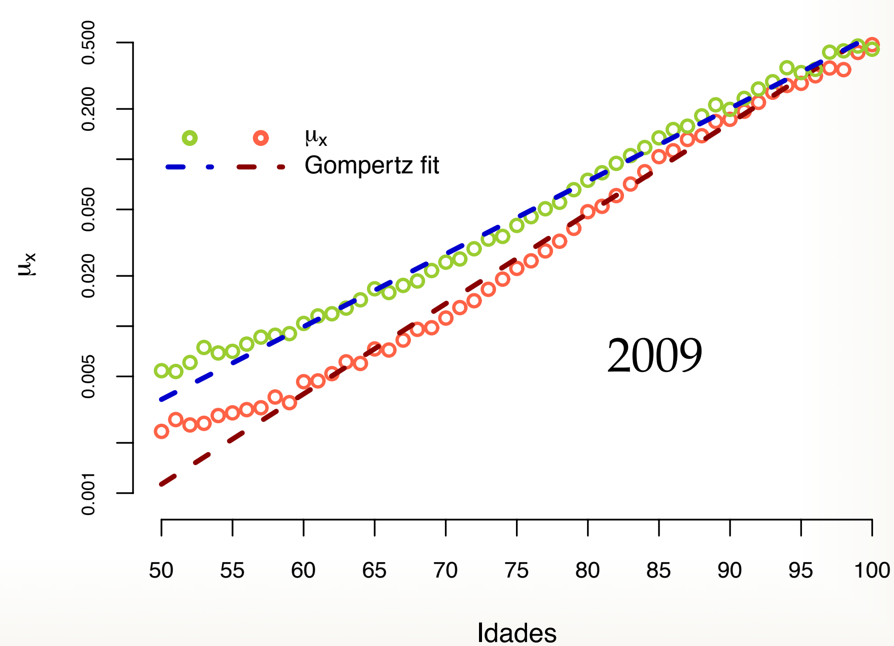
  - Ao número de mortes ocorridas por idade e sexo;
  - Ao número de indivíduos expostos ao evento (risco de morte) por idade e sexo;
  - Para o período entre 1940 e 2009.

Leis de mortalidade I

- Gompertz (1825):

$$\mu_x = ae^{bx}$$





Leis de mortalidade I

- Gompertz (1825):

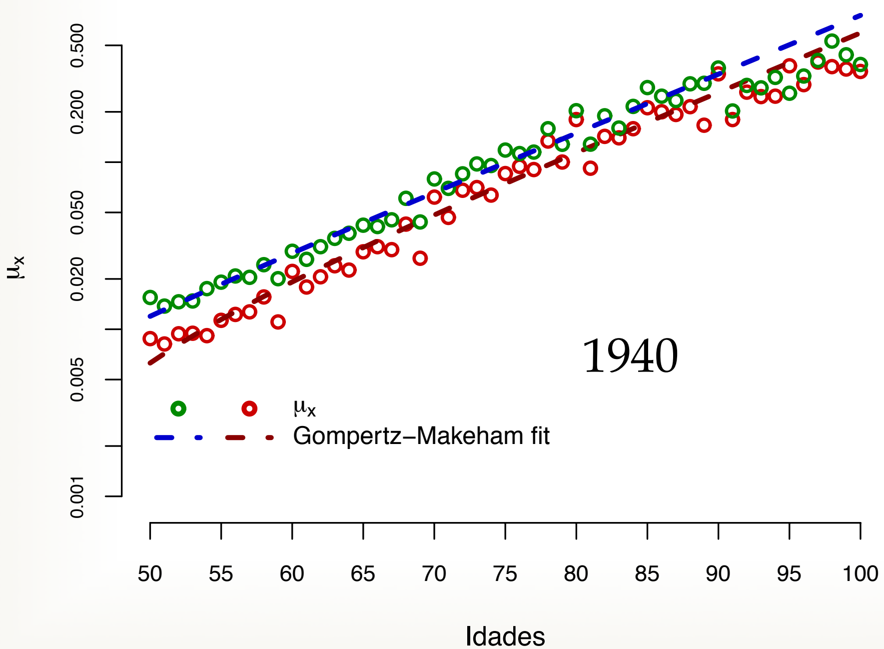
$$\mu_x = ae^{bx}$$

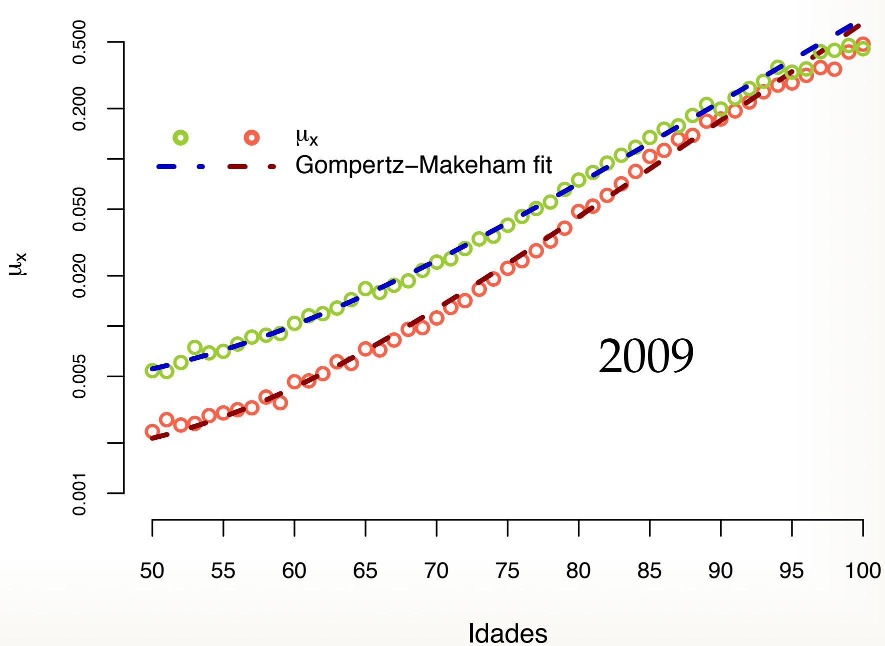
- Este modelo, apesar de ser bastante utilizado até aos dias de hoje, é um modelo do qual resulta alguma *sub-estimação* em idades mais jovens e *sobre-estimação* em idades mais avançadas.

Leis de mortalidade I

- Makeham (1860):

$$\mu_x = ae^{bx} + c$$





Leis de mortalidade I

- Makeham (1860):

$$\mu_x = ae^{bx} + c$$

- A adição de uma constante C ao modelo proposto por Gompertz trouxe algumas melhorias ao ajustamento, no entanto, continua a existir alguma *sobre-estimação* em idades mais avançadas.

Ponto de situação

- <u>Duas leis de mortalidade que:</u>
  - Permitem distinguir entre mortalidade associada ao envelhecimento e mortalidade externa;
  - Mas ainda apresentam dificuldades em explicar os comportamentos dos extremos;
  - E, não têm em conta que numa população existem indivíduos mais frágeis que outros (heterogeneidade).

Fragilidade

- Assenta no conceito de que a função de risco (*hazard*) depende de uma variável aleatória (Z) não observável e independente do tempo, que atua de forma multiplicativa na função de risco base (μ_0):

$$\mu(x \mid Z) = Z\,\mu_0(x)$$

Fragilidade

- Assenta no conceito de que a função de risco (*hazard*) depende de uma variável aleatória (Z) não observável e independente do tempo, que atua de forma multiplicativa na função de risco base (μ_0):

$$\mu(x \mid Z) = Z\,\mu_0(x)$$

  - Fragilidade *Gama*
  - Fragilidade *Hougaard* (P.V.F.)

Fragilidade *gama*

- Assume que a variável aleatória Z segue uma distribuição gama Z ~ **Γ** (*k*, λ), em que a função densidade de probabilidade (p.d.f.) é dada por:

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(k)} \lambda^k z^{k-1} e^{-\lambda z}$$

- **E**Z é dado por k/λ

Fragilidade *gama*

- Mas restringindo $k = \lambda$, por forma a tornar o modelo identificável, ficamos com $Z \sim \Gamma(1/\sigma^2, 1/\sigma^2)$ e p.d.f.:

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{\sigma^2}} z^{\frac{1}{\sigma^2}-1}\exp\left(-\frac{z}{\sigma^2}\right)$$

Fragilidade *gama*

- O que resulta numa função de risco não condicionada dada por:

$$\mu(x) = \frac{\mu_0(x)}{1 + \sigma^2 M_0(x)}$$

  - Em que μ_0 corresponde à função de risco base, M_0 é a função de distribuição cumulativa associada à função de risco base, e σ^2 é o parâmetro que mede a variância da fragilidade populacional.

C.D.F. Gompertz

- Assim, e tendo em conta que a função de distribuição cumulativa Gompertz dada por:

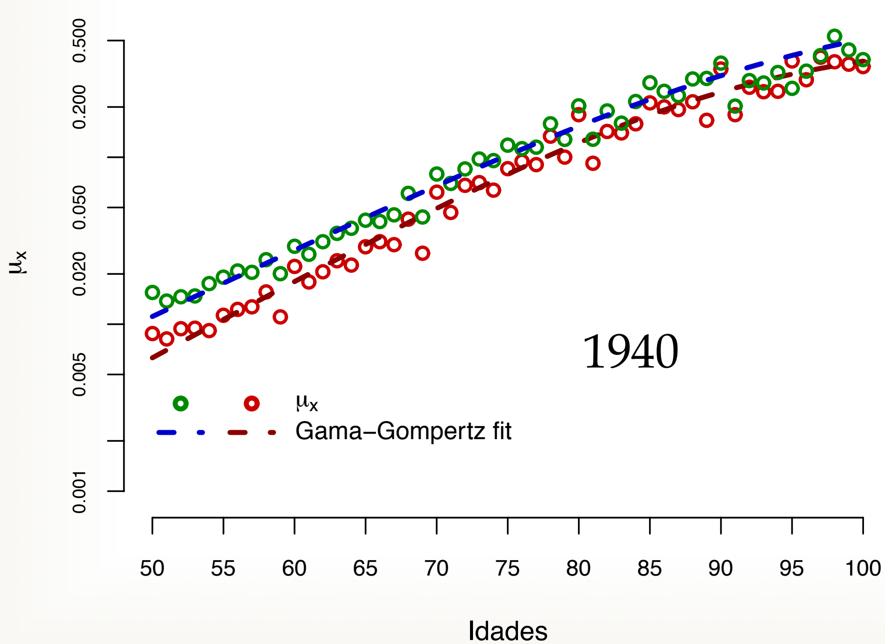
$$M_0(x) = \left(\frac{a}{b}\right)(e^{bx} - 1)$$

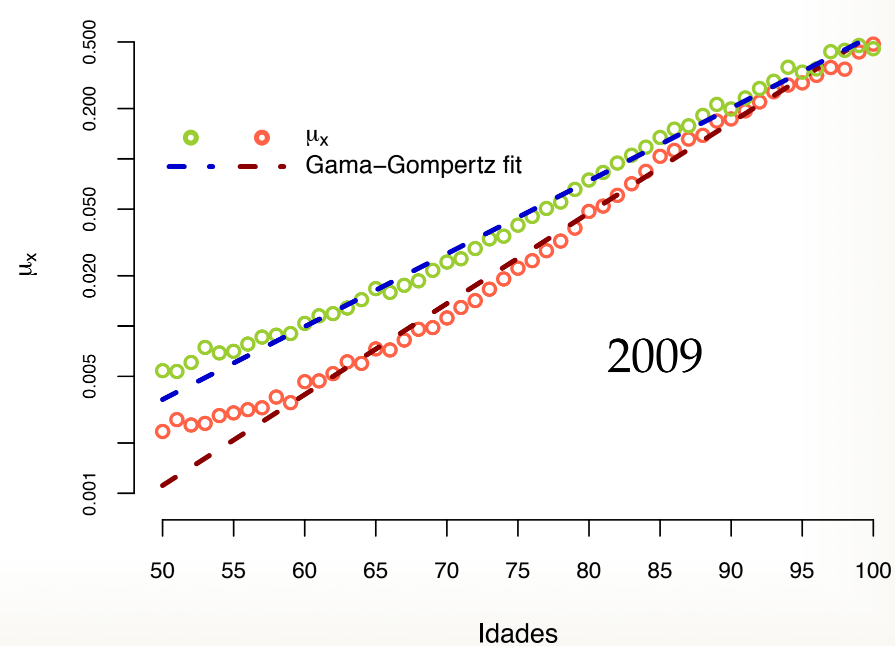
- Temos...

Leis de mortalidade II

- Vaupel, Manton e Stallard (1979):

$$\mu_x = \frac{ae^{bx}}{1 + \frac{\sigma^2 a}{b}(e^{bx} - 1)}$$





Mas será que a distribuição de fragilidade *gama* é a melhor opção?

Fragilidade *Hougaard*

- Para respondermos a essa questão, optou-se pela distribuição de fragilidade derivada por Hougaard em 1986, que é uma distribuição em função potência (P.V.F.) e permite a obtenção de mais que um resultado:

$$PVF(\gamma, \kappa, \lambda)$$

Fragilidade *Hougaard*

- Assumindo novamente **E**Z = μ =1, por forma a tornar o modelo identificável, a função de risco não condicionada é dada por:

$$\mu(x) = \frac{\mu_0(x)}{\left(1 + \frac{\sigma^2}{1-\gamma} M_0(x)\right)^{1-\gamma}}$$

Fragilidade *Hougaard*

- Aqui, é o parâmetro γ que vai permitir identificar ou não a distribuição de fragilidade gama como a mais correta.

- Assim com $\boldsymbol{\gamma = 0}$, obtemos facilmente $\boldsymbol{Z \sim \Gamma(1/\sigma^2, 1/\sigma^2)}$, enquanto que com $\boldsymbol{\gamma = 0.5}$ o resultado será uma distribuição *Gaussiana Inversa*.

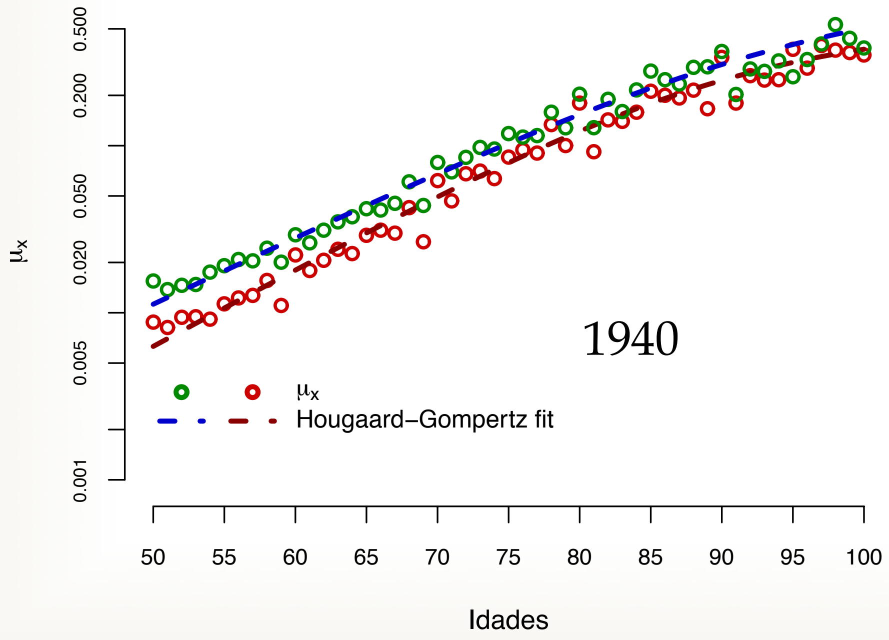
Fragilidade *Hougaard*

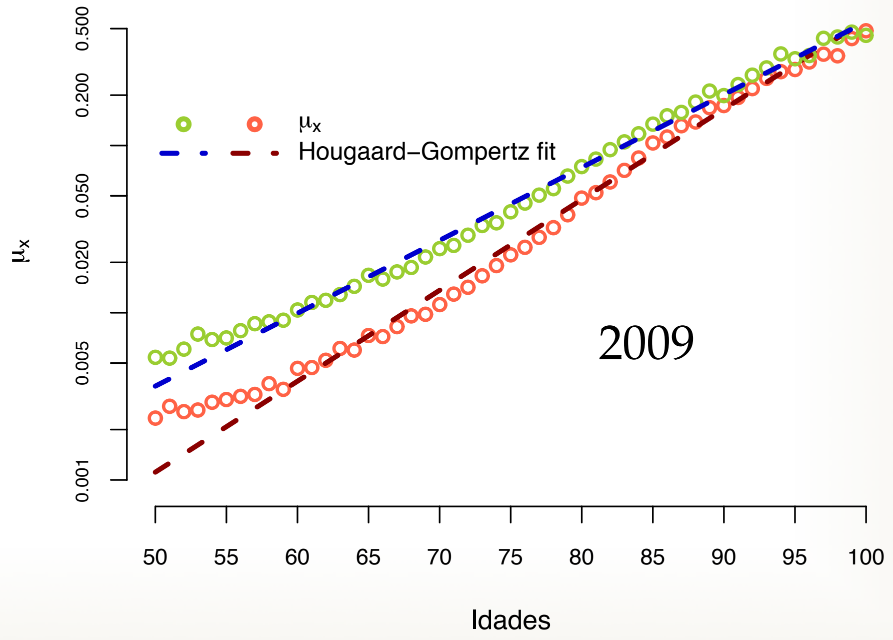
- Assim, mantendo a mesma mortalidade de base Gompertz, temos...

Leis de mortalidade III

- Hougaard (1986):

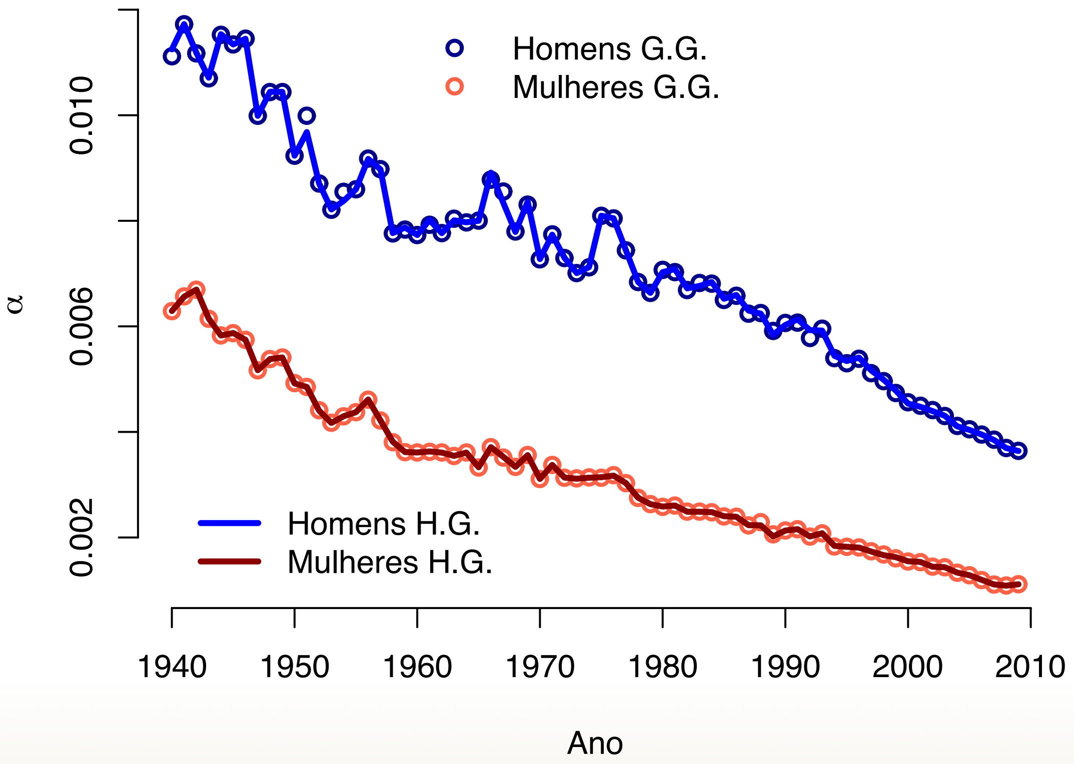
$$\mu_x = \frac{ae^{bx}}{\left(1 + \frac{\sigma^2}{1-\gamma}\frac{a}{b}(e^{bx} - 1)\right)^{1-\gamma}}$$



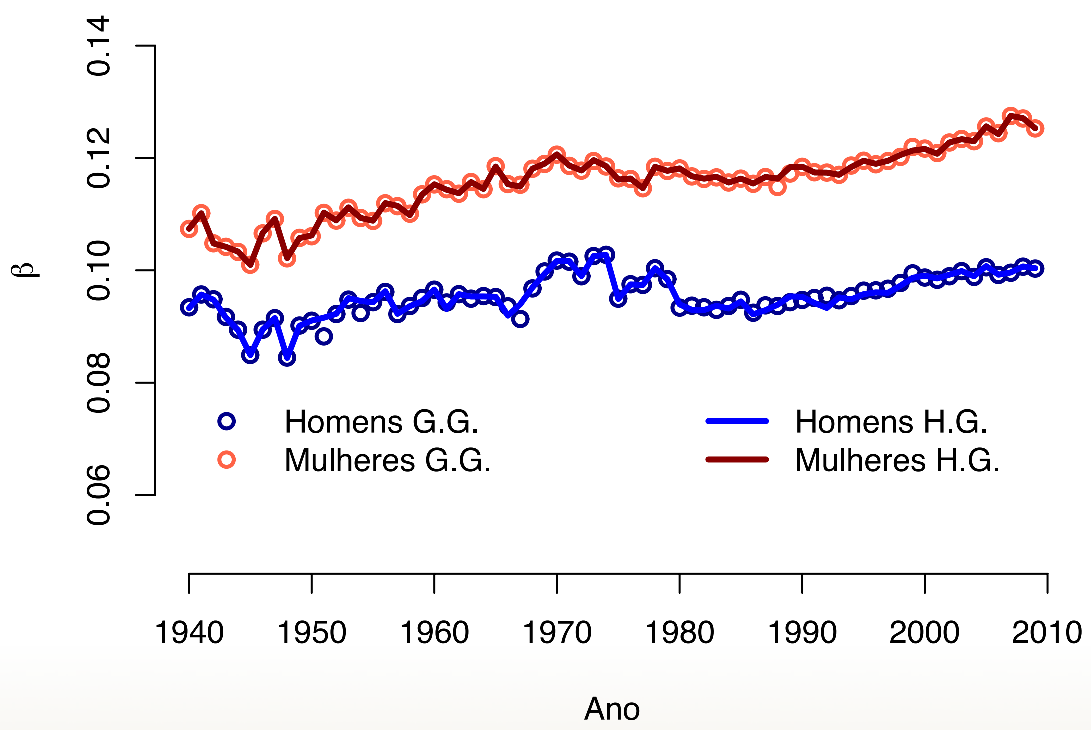


Comparando então os resultados...

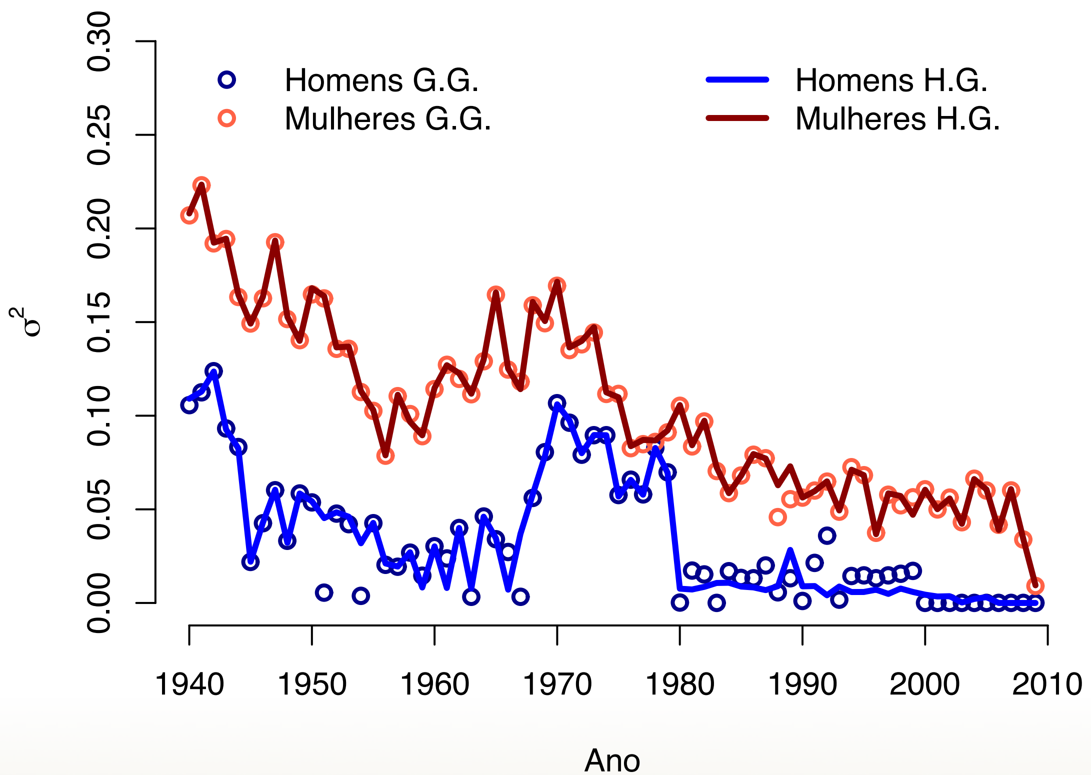
Distribuição de fragilidade gama?



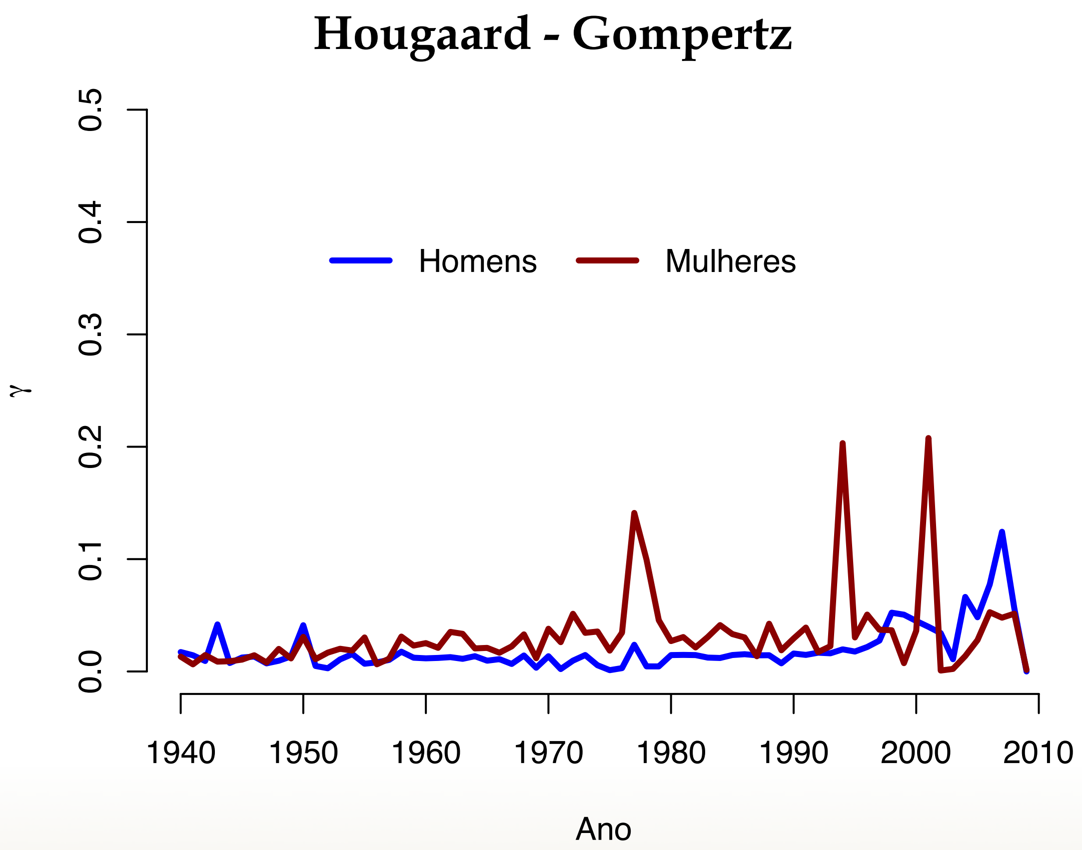
Distribuição de fragilidade gama?



Distribuição de fragilidade gama?



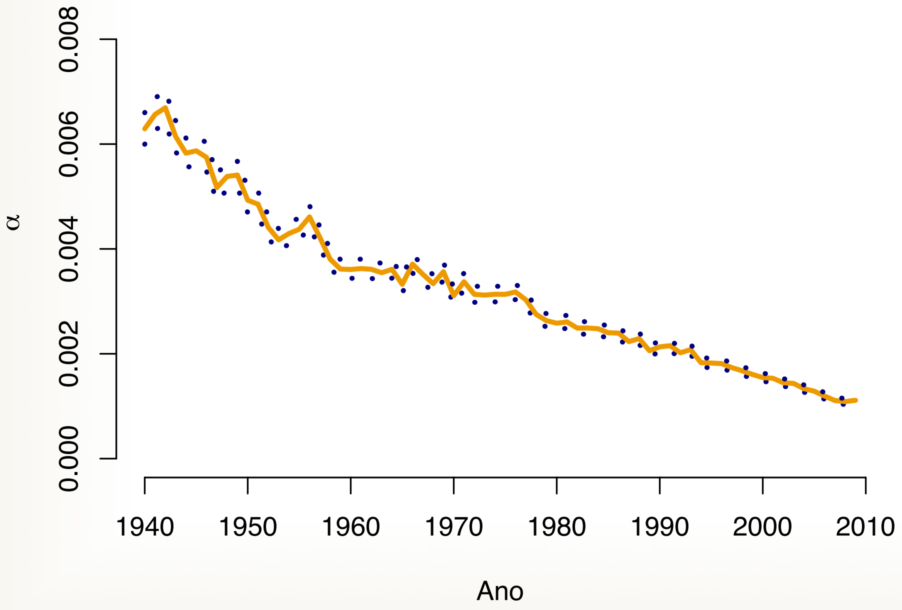
Distribuição de fragilidade gama?



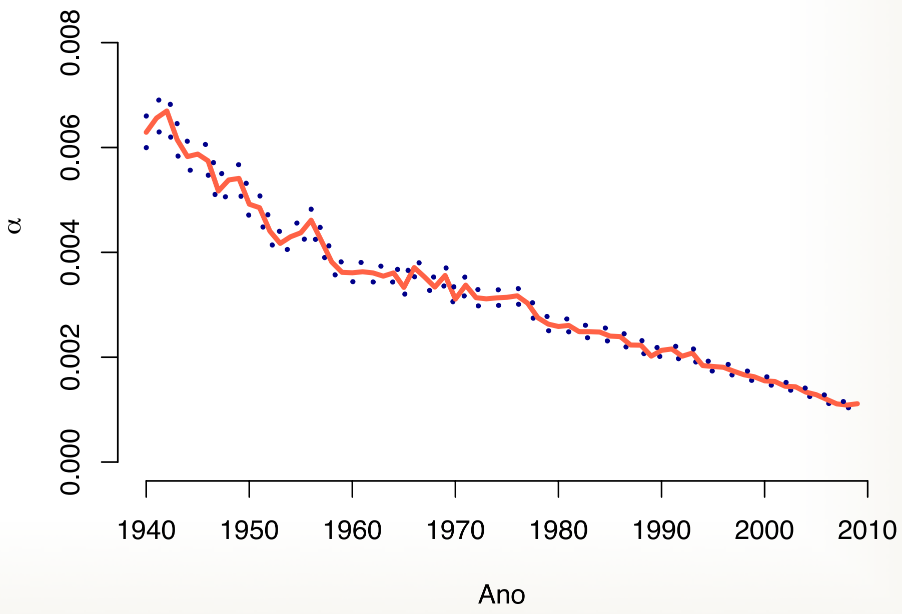
E quanto aos intervalos de confiança para os parâmetros estimados?

I.C. 99% - Mulheres

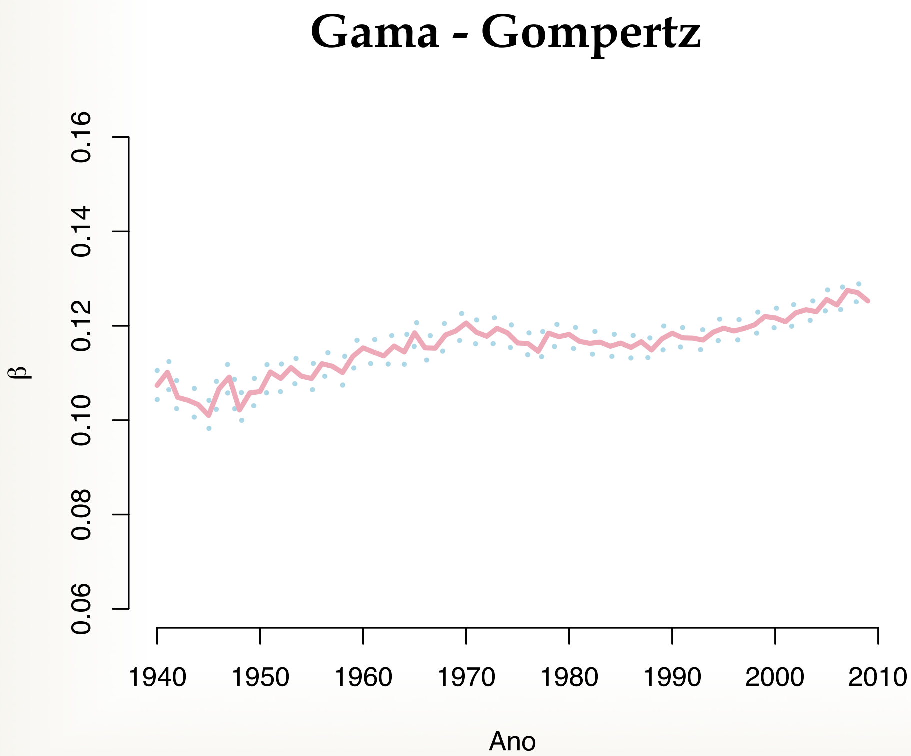
Gama - Gompertz

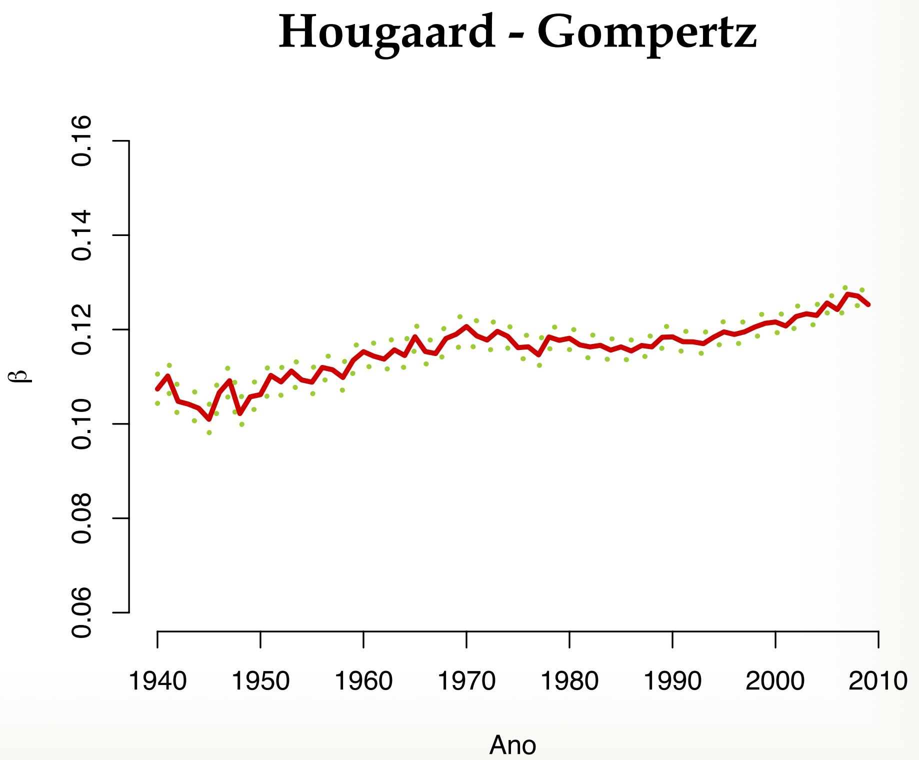


Hougaard - Gompertz



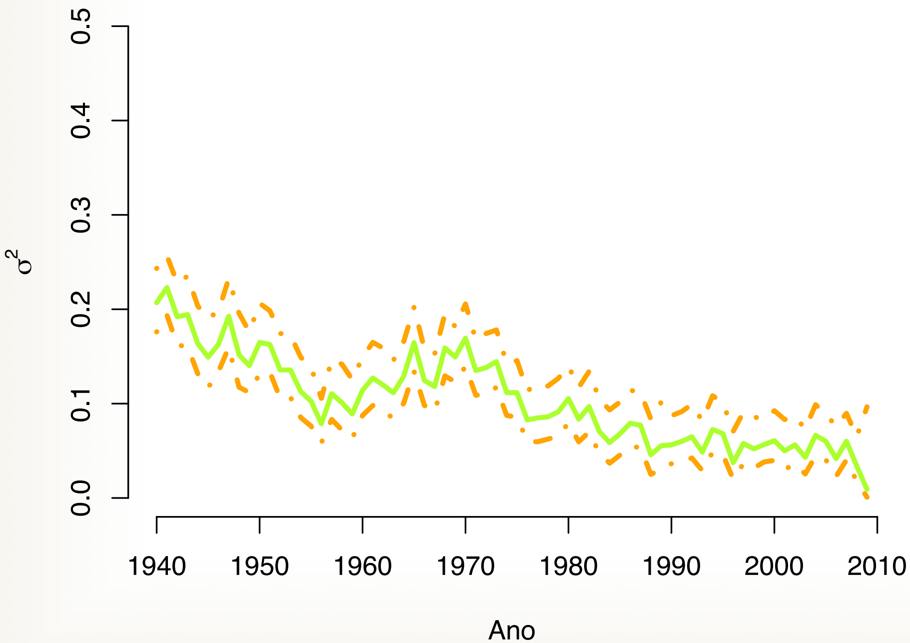
I.C. 99% - Mulheres



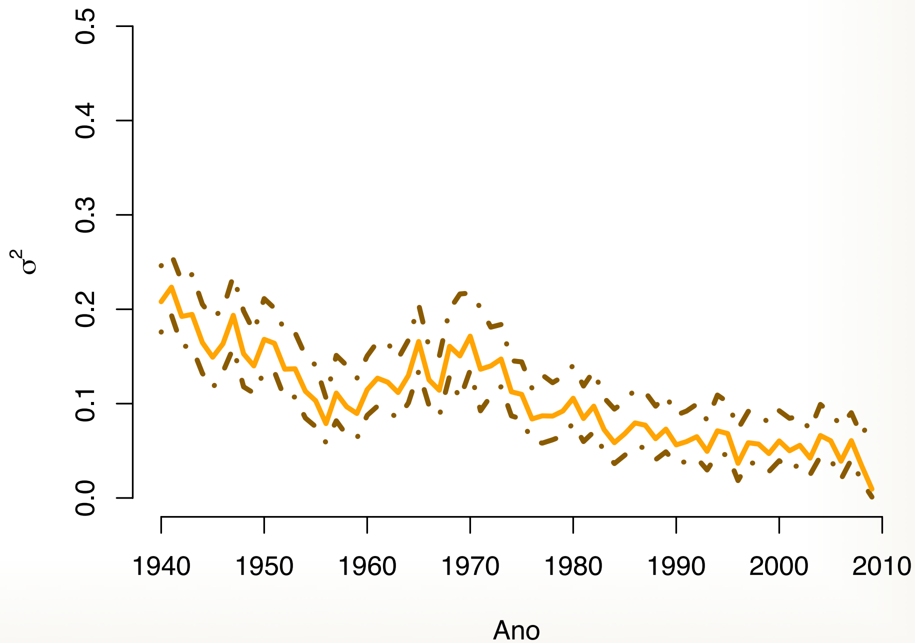


I.C. 99% - Mulheres

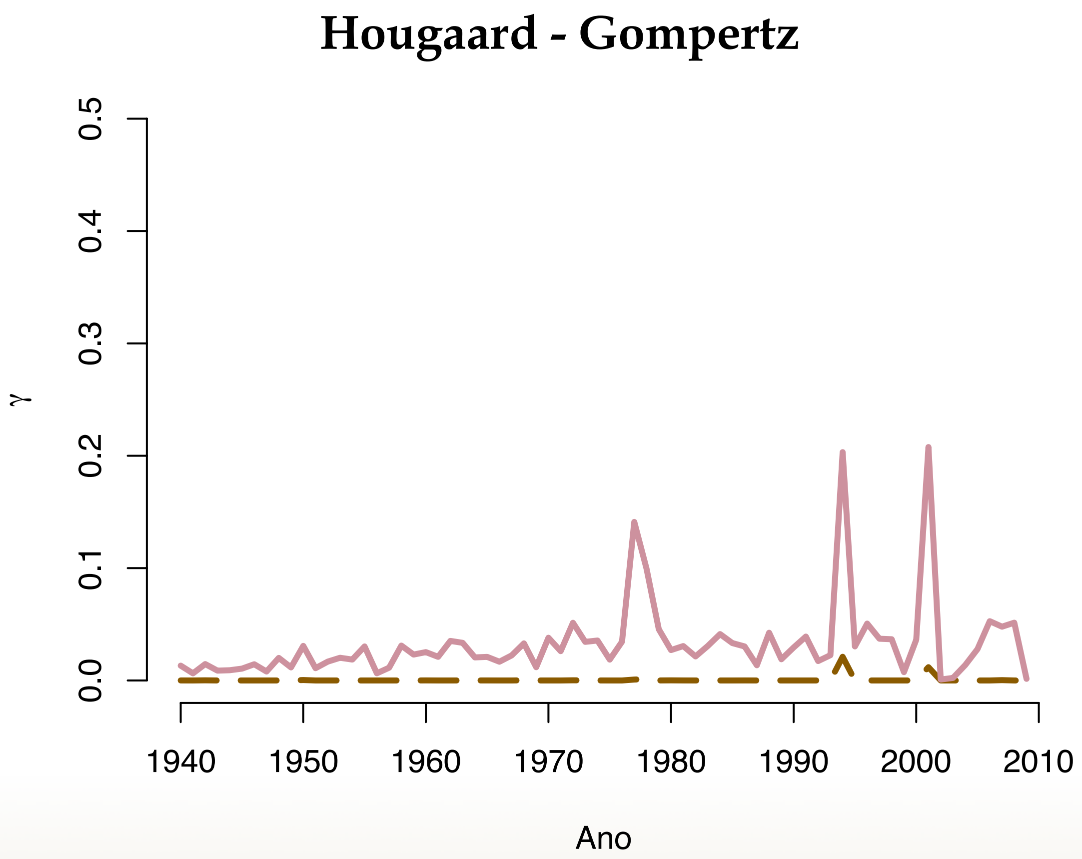
Gama - Gompertz



Hougaard - Gompertz



I.C. 99% - Mulheres



Conclusões I

- O nível de mortalidade aos 50 anos encontra-se a diminuir;
- A velocidade de envelhecimento β encontra-se a aumentar para ambos os sexos;

Conclusões II

- O modelo de fragilidade derivado por Hougaard em 1986, e aqui aplicado com uma mortalidade de base Gompertz, permitiu concluir que, pelo menos para Portugal, a distribuição de fragilidade Gama parece ser a mais indicada.

Muito obrigado pela vossa atenção!

Referências

- **Gompertz**, B. (1825). On the nature of the function expresive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies.Philosophal Transactions of the Royal Society of London 115, 513-585.
- **Hougaard**, P. (1986). Survival methods for heterogeneous populations derived from stable populations. *Biometrika* 73, 387 – 396.
- **Vaupel**, J., **Manton**, K., **Stallard**, E. (1979). The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality. *Demography* 16, 855-860.
- **Wienke**, A. (2011). *Frailty models in survival analysis*. Chapman & Hall/CRC Biostatistics Series, New York.